

Der Beitrag computerorientierter Elementmethoden zur Steigerung der Tragwerkssicherheit bei Schalentragwerken

Krätzig, Wilfried B.

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1987 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.163-180



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Der Beitrag computerorientierter Elementmethoden zur Steigerung der Tragwerkssicherheit bei Schalentragwerken

Von **Wilfried B. Krätzig**, Ruhr-Universität Bochum

1. Vorbemerkungen

Alles auf dieser Welt ist vergänglich: es besitzt Anfang und Ende. Dies gilt für Lebewesen, also für uns, und für die Gebilde der Technik. Da das Ende gewiß, aber nicht terminiert ist, kann Lebensdauer nur in statistischen Kategorien gemessen werden: mit den Begriffen der *mittleren Lebensdauer* und der *Versagenswahrscheinlichkeit*.

Beides sind Begriffe der Technik. *Versagenswahrscheinlichkeit* quantifiziert Gefährdungen eines technischen Systems dual zur *Sterbewahrscheinlichkeit* eines Menschen. Da der Mensch in die Technik eingebunden ist, beeinflußt die Versagenswahrscheinlichkeit vieler technischer Systeme die Sterbewahrscheinlichkeit ihrer Benutzer: es kommt zu *kombinierten Versagenswahrscheinlichkeiten*. Anders ausgedrückt: Technische Systeme besitzen i. a. Gefährdungspotentiale für die sie nutzenden Menschen. Vorbedingung für Akzeptanz eines technischen Systems durch die Gesellschaft ist

- der erkennbare Nutzen,
- oftmals das Vergnügen an seiner Benutzung,
- vor allem aber die Limitierung der Zusatzgefährdung auf von der Allgemeinheit tolerierte Grenzwerte.

Aus den bei dieser Begrenzung zu beobachtenden ökonomischen Abhängigkeiten können sich Widersprüche zwischen den Möglichkeiten der Technik und den Bedürfnissen der sie nutzenden Gesellschaft entwickeln.

Eine besonders umfassende Gefährdung des Menschen geht von *Baukonstruktionen* aus, wie uns Sturmschäden, Gasexplosionen, Erdbebenzerstörungen oder Brände immer wieder lehren. Allerdings sind wir uns dessen selten bewußt, weil Bauwerke wichtige Urbedürfnisse des Menschen nach Wärme, Schutz und Geborgenheit befriedigen.

Dennoch stellt, wegen dieses Gefährdungspotentials von Bauwerken, die *Gefährdungsabwehr bzw. -reduktion* eine Hauptaufgabe der Bauingenieure dar. Hierzu benötigen sie genaueste Kenntnisse der jeweiligen Versagensphänomene einer zu beurteilenden Baukonstruktion, die i. a. aus der Anwendung differentiell formulierter Naturgesetze auf ein Tragwerk, also durch Lösung von *Rand- oder Anfangsrandwert-*

problemen, zu gewinnen sind. Auf diesem Weg erkannte Versagensphänomene werden durch *Sicherheitsfaktoren* soweit ausgegrenzt, daß die Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens der Gesellschaft vertretbar erscheinen. Dies ist die klassische Methodik des Bauingenieurwesens: Da fast immer Unikate errichtet werden, stützt man sich auf rechnerische Nachweisverfahren ab. Man untersucht Versagensphänomene nur selten, wie im gesamten Maschinenbau noch üblich, durch Experimente an Prototypen.

Die Lösung der Rand- oder Anfangsrandwertprobleme bei Baukonstruktionen zielt auf die Bestimmung ihrer *Spannungs- und Verformungszustände*. Dieses Ziel ist ohne die modernen, computerorientierten Berechnungsmethoden, die *Elementmethoden*, völlig undenkbar. Fast immer ist nämlich das zum Versagen führende physikalische Geschehen vielfältig, kompliziert und verwickelt. Vor allem aber spielt es sich nicht in einfachen mathematischen Gebieten ab, sondern in ebenen oder räumlichen Strukturen kompliziertester Gestalt: unseren Tragwerken.

Damit ist mein Thema umrissen: Die *Gefahrenabwehr* durch sichere Ausgrenzung des Tragwerksversagens, die Notwendigkeit, dies auf *numerische Nachweisprozesse* zu begründen, und die Rolle moderner, *computerorientierter Berechnungskonzepte* hierbei.

2. Diskretisierungskonzept und Spannungsanalysen

Auf Bild 1 betrachten wir die Mittelfläche F und Berandung C eines beliebigen Flächentragwerks, dessen Punkte durch ein Netz GAUSSscher Koordinaten Θ^1, Θ^2 beschrieben werden. Dieses Tragwerk sei beliebig gelagert und beliebig belastet. Meinem Thema gemäß soll das zugeordnete Randwertproblem nicht exakt gelöst werden, sondern *näherungsweise* mit einer Elementmethode. Daher wurde bereits ein finites Dreiecksraster über das Schalengebiet gezogen.

Die mechanischen Grundgleichungen dieses Problems zeigt, in symbolischer Darstellung, das TONTI-Schema des Bildes 2 [1],[2]. Es enthält die Variablen und Trans-

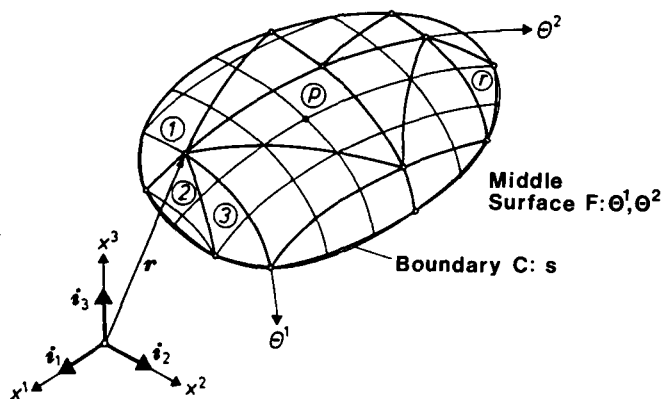


Bild 1:
Diskretisiertes Flächentragwerk

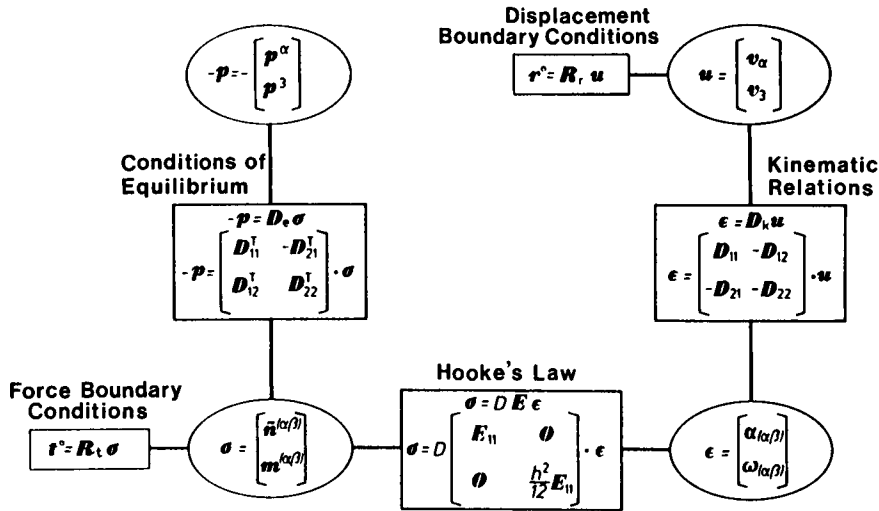


Bild 2:

Strukturschema einer konsistenten, linear-elastischen Flächentragwerkstheorie vom Kirchhoff-Love-Typ (Variante A)

formationen einer linear-elastischen Flächentragwerkstheorie. In den beiden oberen Ellipsen befinden sich links die Mittelflächenlasten \mathbf{p} sowie rechts die Feldverschiebungen \mathbf{u} , darunter die Schnittgrößen σ und die Verzerrungen ϵ . Alles stellen *matrizenvariable* dar: sie sind als Spalten definiert, deren Elemente aus Tensorkomponenten bestehen:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}^{(\alpha\beta)} \\ \mathbf{m}^{(\alpha\beta)} \end{bmatrix}, \epsilon = \begin{bmatrix} \alpha_{(\alpha\beta)} \\ \omega_{(\alpha\beta)} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Hierin bilden $\mathbf{p}^\alpha = \{p^1, p^2\}$, $\mathbf{v}_\alpha = \{v_1, v_2\}$ tangential zur Mittelfläche, $\mathbf{p}^3 = p^3$, $\mathbf{v}_3 = v_3$ normale Komponenten. $\tilde{\mathbf{n}}^{(\alpha\beta)} = \{\tilde{n}^{(11)}, \tilde{n}^{(12)}, \tilde{n}^{(21)}, \tilde{n}^{(22)}\}$ faßt die Komponenten des symmetrischen Dehnungskrafttensors zusammen, $\mathbf{m}^{(\alpha\beta)} = \{m^{(11)}, m^{(12)}, m^{(21)}, m^{(22)}\}$ diejenigen des Momententensors. $\alpha_{(\alpha\beta)} = \{\alpha_{(11)}, \alpha_{(12)}, \alpha_{(21)}, \alpha_{(22)}\}$ und $\omega_{(\alpha\beta)} = \{\omega_{(11)}, \omega_{(12)}, \omega_{(21)}, \omega_{(22)}\}$ verkörpern den 1. und 2. Verzerrungstensor der Mittelfläche. Auf gleicher Ebene stehende Variablen leisten miteinander mechanische Arbeit: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$, $\sigma \cdot \epsilon$.

In den Kästen dieses Schemas sind die Gleichgewichtsbedingungen (links) und die kinematischen Beziehungen (rechts) als *matrizenvariable Differentialoperationen* angeordnet. Randkraftgrößen \mathbf{t} und Randverschiebungen \mathbf{r} sind mit ihren Grundvariablen im wesentlichen *algebraisch* verknüpft; dies trifft vollständig auf das Werkstoffgesetz zu. Stellvertretend für die genannten Operationen sind in Bild 3 die kinematischen Beziehungen detailliert, dabei kürzen d_1, d_2 *kovariante* Ableitungen auf der Mittelfläche ab.

Jede konsistente physikalische Theorie läßt sich in einem solchen Schema darstellen, wobei *lineare* Theorien der Elastomechanik durch die Adjungiertheit ihrer beiden

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \alpha_{(11)} \\ \alpha_{(12)} \\ \alpha_{(21)} \\ \alpha_{(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{D}_{12} \\ -\mathbf{D}_{21} & -\mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{v} \quad \begin{matrix} d_1 = \dots /_1 \\ d_2 = \dots /_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{(11)} \\ \alpha_{(12)} \\ \alpha_{(21)} \\ \alpha_{(22)} \\ \omega_{(11)} \\ \omega_{(12)} \\ \omega_{(21)} \\ \omega_{(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -b_{11} \\ \frac{1}{2}d_2 & \frac{1}{2}d_1 & -b_{12} \\ \frac{1}{2}d_2 & \frac{1}{2}d_1 & -b_{21} \\ 0 & d_2 & -b_{22} \\ -(2b_1^1 d_1 + b_1^1 /_1) & -(2b_1^2 d_1 + b_1^2 /_1) & -(d_{11} - b_1^1 b_{11} - b_1^2 b_{12}) \\ -(b_2^1 d_1 + b_1^1 d_2 + \frac{1}{2}(b_2^1 /_1 + b_1^1 /_2)) & -(b_2^2 d_1 + b_1^2 d_2 + \frac{1}{2}(b_2^2 /_1 + b_1^2 /_2)) & -(\frac{1}{2}d_{12} + \frac{1}{2}d_{21} - b_1^1 b_{12} - b_1^2 b_{22}) \\ -(b_2^1 d_1 + b_1^1 d_2 + \frac{1}{2}(b_2^1 /_1 + b_1^1 /_2)) & -(b_2^2 d_1 + b_1^2 d_2 + \frac{1}{2}(b_2^2 /_1 + b_1^2 /_2)) & -(\frac{1}{2}d_{12} + \frac{1}{2}d_{21} - b_1^1 b_{12} - b_1^2 b_{22}) \\ -(2b_2^1 d_2 + b_2^1 /_2) & -(2b_2^2 d_2 + b_2^2 /_2) & -(d_{22} - b_2^1 b_{12} - b_2^2 b_{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Bild 3:
Kinematische Beziehungen

Operationen $\mathbf{D}_e, \mathbf{D}_k$ gekennzeichnet sind. Analoge Darstellungen für weitere Formulierungsvarianten von Flächentragwerkstheorien finden sich in [2].

Zur näherungsweisen Lösung des eingangs skizzierten Randwertproblems stellen wir nun das *elastische Gesamtpotential* eines typischen Elementes endlicher Größe, eines *finiten Elementes* p auf. Mit den Bezeichnungen des Bildes 2 lautet dieses:

$$\pi^p = 1/2 \iint_{F^p} \epsilon^{pT} \mathbf{D} \mathbf{E} \epsilon^p dF^p - \iint_{F^p} \mathbf{u}^{pT} \mathbf{p} dF^p - \int_{C_1^p} \mathbf{r}^{pT} \mathbf{t}^p ds^p. \quad (2)$$

Elementweise trifft man sodann Lösungsansätze für das Verschiebungsfeld \mathbf{u}^p , aus denen solche für die Verzerrungen ϵ^p und die Randverschiebungen \mathbf{r}^p herleitbar sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^p &= \mathbf{\Omega}^p \mathbf{v}^p, \\ \epsilon^p &= \mathbf{D}_k \mathbf{\Omega}^p \mathbf{v}^p = \mathbf{H}^p \mathbf{v}^p, \\ \mathbf{r}^p &= \mathbf{R}_1 \mathbf{\Omega}^p \mathbf{v}^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Lösungsansätze werden auf diskrete Elementgrößen \mathbf{v}^p bezogen, die sog. *Elementfreiheitsgrade*, als welche zweckmäßigerweise Weggrößen in den Elementknoten gewählt werden.

Nun werden die Testfunktionen (3) in das Funktional (2) substituiert und anschließend die Integrationen ausgeführt:

$$\begin{aligned} \pi^p &= 1/2 \mathbf{v}^{pT} \iint_{F^p} \mathbf{H}^{pT} \mathbf{D} \mathbf{E} \mathbf{H}^p dF^p \mathbf{v}^p \\ &\quad - \mathbf{v}^{pT} \iint_{F^p} \mathbf{\Omega}^{pT} \mathbf{p} dF^p - \mathbf{v}^{pT} \int_{C_1^p} \mathbf{\Omega}^{pT} \mathbf{R}_1^T \mathbf{t}^p ds^p \\ &= 1/2 \mathbf{v}^{pT} \mathbf{k}^p \mathbf{v}^p - \mathbf{v}^{pT} \mathbf{p}_F^p - \mathbf{v}^{pT} \mathbf{p}_c^p. \end{aligned} \quad (4)$$

Macht man sodann dieses Näherungspotential durch seine notwendige Bedingung, das Verschwinden der 1. Variation von π^p hinsichtlich \mathbf{v}^p , stationär, so gelangt man zu der linearen *Elementsteifigkeitsbeziehung*:

$$\delta\pi^p = \mathbf{k}^p \mathbf{v}^p - \mathbf{p}_F^p - \mathbf{p}_c^p = \mathbf{k}^p \mathbf{v}^p - \mathbf{p}^p = \mathbf{0}. \quad (5)$$

In dieser Relation zwischen Elementknotenkräften \mathbf{p}^p und Elementfreiheitsgraden \mathbf{v}^p spielt die Proportionalitätsmatrix \mathbf{k}^p , die *Elementsteifigkeitsmatrix*, eine herausragende Rolle. Wegen der gleichen Ordnung der Matrizen $\mathbf{p}^p, \mathbf{v}^p$ ist sie stets *quadratisch*, wegen der quadratischen Form der inneren Energie in (2) *symmetrisch* und *positiv definit*.

Durch Zusammenbau aller Elemente zur Gesamtstruktur gewinnt man die *Gesamtsteifigkeitsbeziehung* (8), offensichtlich als notwendige Bedingung für *Stationarität* des *globalen* Näherungspotentials Π , im Falle der getroffenen Voraussetzungen sogar für dessen Minimaleigenschaften:

$$\mathbf{v}^p = \mathbf{a}^p \mathbf{V}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{p=1}^r \pi^p = 1/2 \mathbf{V}^T \sum_{p=1}^r \mathbf{a}^{pT} \iint_{F^p} \mathbf{H}^{pT} \mathbf{D} \mathbf{E} \mathbf{H}^p dF^p \mathbf{a}^p \mathbf{V} \\ &\quad - \mathbf{V}^T \sum_{p=1}^r \mathbf{a}^{pT} \iint_{F^p} \boldsymbol{\Omega}^{pT} \mathbf{p} dF^p - \mathbf{V}^T \sum_{p=1}^r \mathbf{a}^{pT} \int_{C_1^p} \boldsymbol{\Omega}^{pT} \mathbf{R}_t^T \mathbf{t}^p ds^p \\ &= 1/2 \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{P}_F - \mathbf{V}^T \mathbf{P}_c = 1/2 \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta\Pi = \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Dabei werden die in der Spalte \mathbf{V} der *globalen Knotenfreiheitsgrade* zusammengefaßten Matrixelemente ebenso wie die *globalen Knotenkraftgrößen* \mathbf{P} zweckmäßigerweise auf ein globales, für das gesamte Tragwerk geltendes Bezugssystem bezogen. \mathbf{P} und \mathbf{V} sind erneut energetisch korrespondierend, und die *Gesamtsteifigkeitsmatrix* \mathbf{K} ist wieder quadratisch, symmetrisch und positiv definit. Für ein kinematisch unverschieblich gelagertes Tragwerk ist sie darüber hinaus regulär.

Die Gesamtsteifigkeitsbeziehung (8) stellt die Grundgleichung des *Weggrößenverfahrens* der finiten Elemente dar. Aus vorgegebenen Knotenlasten \mathbf{P} werden zunächst die Knotenfreiheitsgrade \mathbf{V} bestimmt, hieraus mittels (6) die Elementfreiheitsgrade \mathbf{v}^p und aus diesen mittels (3) die genäherten Weggrößenfelder $\mathbf{u}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{r}^p$. Die Transformationen des Bildes 3 führen hieraus zu allen bemessungsrelevanten Kraftgrößenfeldern.

Man erkennt unschwer, daß diese Vorgehensweise das bekannte RITZsche Verfahren [3], 1909 publiziert, darstellt: Die globale Steifigkeitsbeziehung bildet dabei das RITZsystem. Das Verfahren konvergiert *energetisch* bei Erhöhung der RITZparameter, hierfür stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- eine Erhöhung der Anzahl der Ansatzfunktionen im Element, dies führt auf sog. *höhere* Elemente,
- eine Netzverdichtung.

Beide Wege, die erweiterte Gleichungssysteme (8) erzeugen, werden bei der maschinellen Anwendung dieser *Methode der finiten Elemente* beschriftet. Dabei erfolgen alle Bearbeitungsabschnitte, von der Elementintegration über die Lösung der globalen Steifigkeitsbeziehung bis hin zur Auswertung der Freiheitsgrade, als On-Line-Prozeß im Computer: der Schlüssel für den Erfolg und die Verbreitung dieser Vorgehensweise.

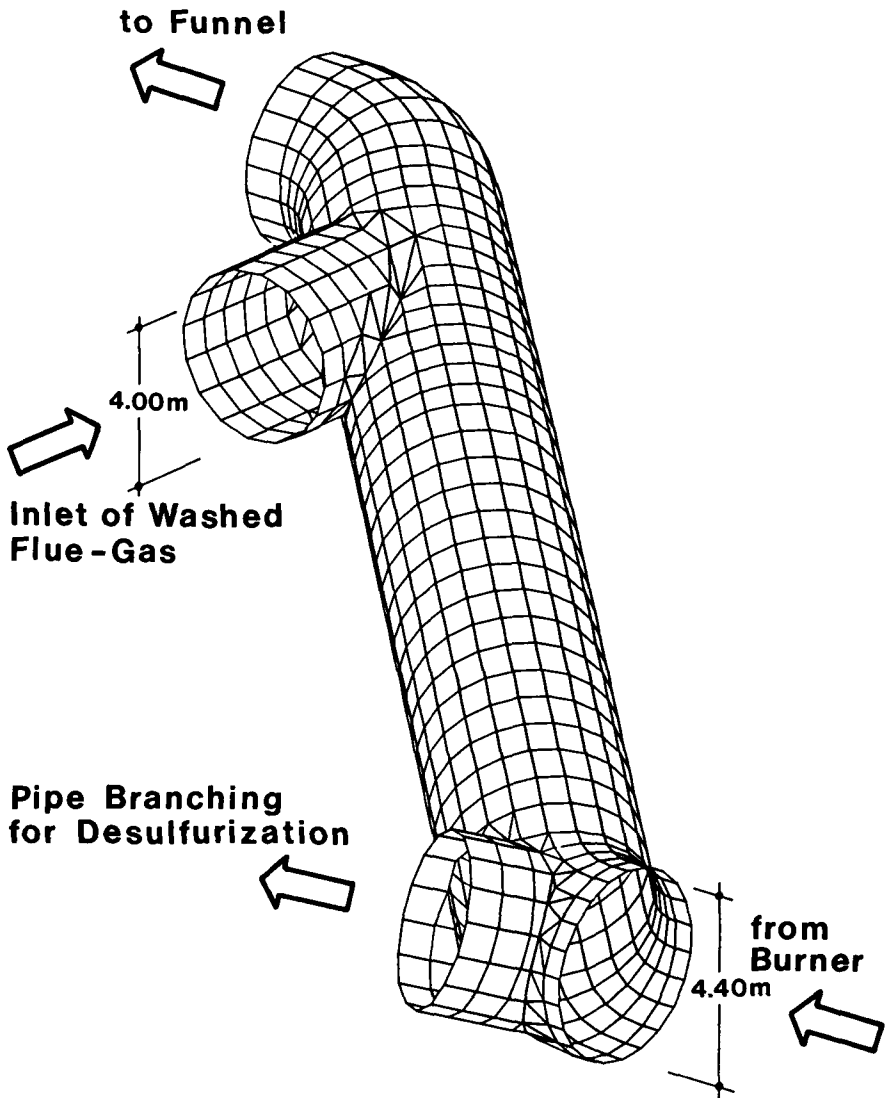


Bild 4:
Teil des Rauchgaskanals eines Kraftwerks

Im folgenden soll die Anwendung dieser Methode auf Spannungsanalysen skizziert werden. Das erste Beispiel behandelt den stählernen Rauchgaskanal eines Kraftwerks, an welchen nachträglich Zu- und Ableitungen der Rauchgas-Entschwefelungsanlage anzuschließen waren. Die an den Rohrverschneidungen auftretenden Zusatzspannungen erforderten dort Blechverstärkungen und Zusatzrippen zur Gewähr ausreichender Sicherheit. Bild 4 zeigt die Gesamtdiskretisierung, der ein einfaches *Scheiben-Platten-Element* zugrundeliegt, Bild 5 eine überhöhte Darstellung der berechneten Knoten-

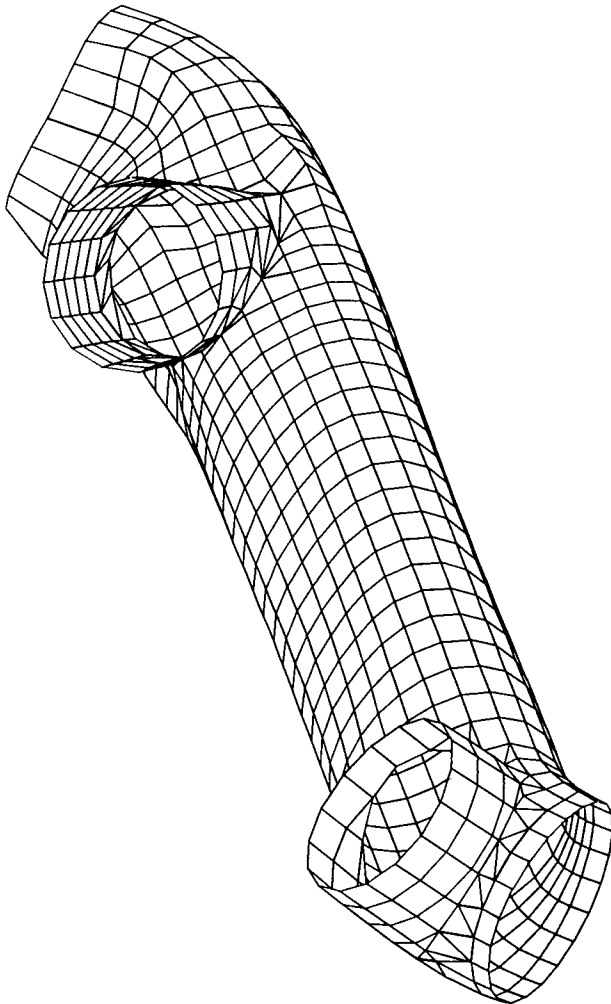
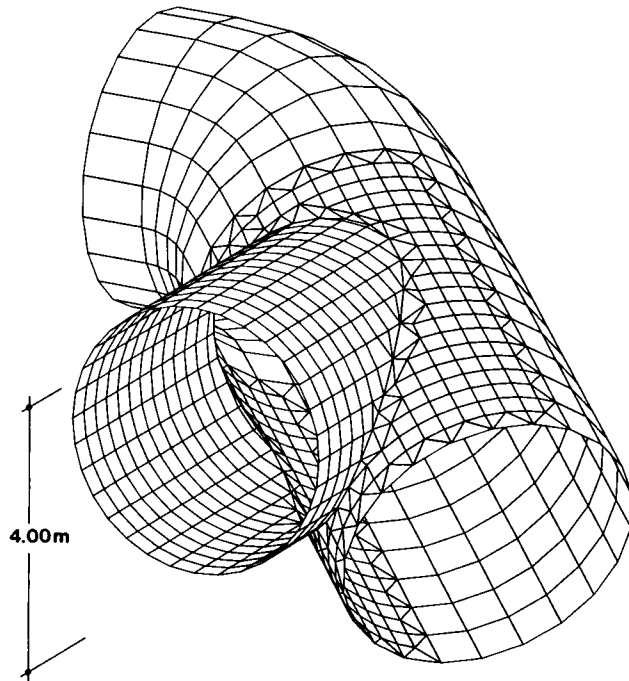


Bild 5:
Windverformungen des Rauchgaskanals von Bild 4



*Bild 6:
Ursprüngliches und verdichtetes Netz*

verformungen unter Windbelastung in linearer Interpolation. Für die Spannungsnachweise in den Öffnungsbereichen waren verdichtete Diskretisierungen erforderlich, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen: Bild 6 zeigt Teile des ursprünglichen und das verdichtete Elementnetz.

Das zweite Beispiel behandelt die Einleitung gewaschener Rauchgase in einen Naturzugkühlturm. Die Diskretisierung mit beträchtlich leistungsfähigeren Schalenelementen [4] findet sich auf Bild 7, dort ist ebenfalls die erforderliche Netzverdichtung im Störungsbereich deutlich zu erkennen. Bild 8 gibt erneut die berechnete, unter Wind verformte Konfiguration in starker Überhöhung wieder, Bild 9 die entstehenden Meridiankräfte im Einleitungsbereich.

Somit wäre für diese Problemklasse die Kernfrage nach dem Beitrag computerorientierter Elementverfahren zur Steigerung der Tragwerkssicherheit folgendermaßen zu beantworten: Ist die Tragwerkssicherheit allein aus dem *Spannungszustand* heraus beurteilbar, so sind finite Elementmethoden vorteilhaft anwendbar. Sie gestatten die Berechnung beliebig komplizierter Strukturen, und ihre Ergebnisse sind durch Anwendung höherer Elemente bzw. dichter Netze beliebig detaillierbar.

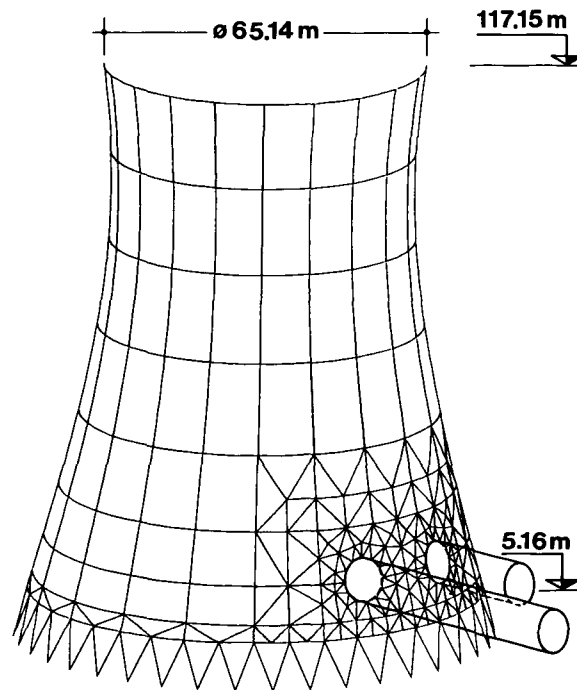


Bild 7:
Diskretisierter Naturzugkühlturm mit Rauchgaseinleitung

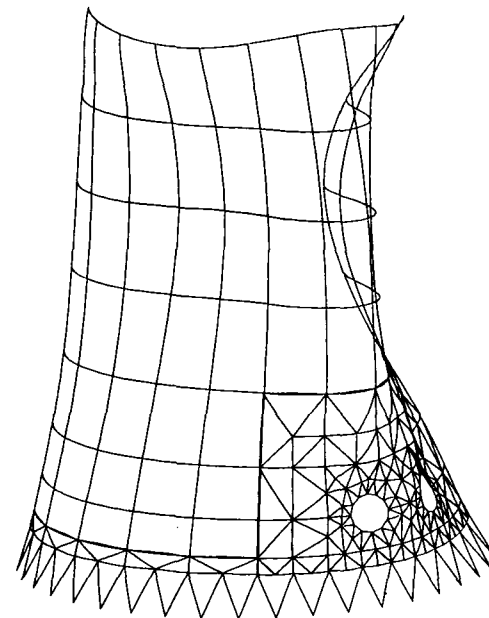


Bild 8:
Windverformter Naturzugkühlturm

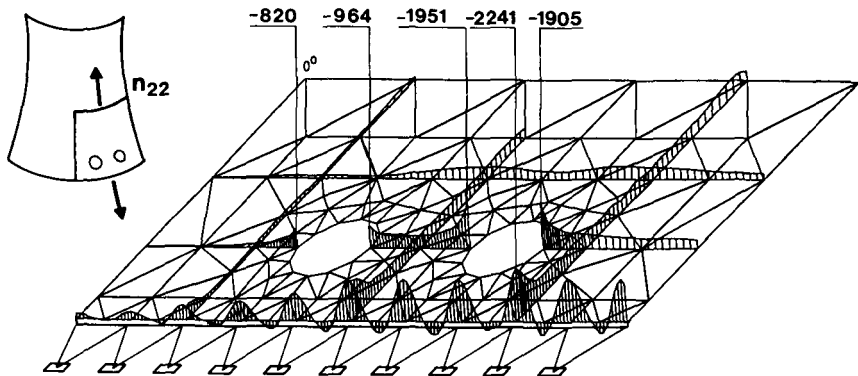


Bild 9:
Meridiankräfte im Einleitungsbereich

3. Tragwerksinstabilitäten und Stabilisierungsanalysen

Was verstehen wir unter Tragwerksinstabilitäten? Zur Erläuterung denken wir uns einen sehr flachen Dreibock, dessen Stäbe in einem zentralen Knoten gelenkig miteinander sowie gelenkig mit ihren Fundamenten verbunden seien. Das Tragwerk werde zentral durch eine vertikale Einzellast P beansprucht.

Steigert man nun P und registriert die sich hierbei einstellende, korrespondierende Durchbiegung V als *Last-Verformungspfad*, so wächst V überproportional bis zu einem Punkt P_D, V_D mit horizontaler Tangente an: dem *Durchschlagspunkt*. Bei diesem schlägt der Dreibock in einem dynamischen Prozeß in seine zur Ausgangskonfiguration spiegelbildliche Form durch. Erfolgt dieses Durchschlagsphänomen ohne weitere Schädigung, so können danach zusätzliche Laststeigerungen im sog. *Nachbeulbereich* erfolgen.

Auf diesem Wege zum Durchschlagspunkt wachsen die Stabkräfte in den drei Stäben stark an. Erreichen sie ihre jeweiligen *Knicklasten*, die je Stab unterschiedlich sein mögen, so zweigen bei jedem Ausknicken *sekundäre* Pfade vom *ursprünglichen* Last-Verformungspfad ab. Erst im stabilen Nachbeulbereich münden diese wieder in den Primärpfad ein. Nach Durchlaufen eines *nichtlinearen* Last-Verformungspfades kann der Dreibock somit im *Durchschlagspunkt* seinen Zustand *stabilen* Gleichgewichts verlassen und vorübergehend *instabil* werden, dies ist zusätzlich beim Passieren jedes *Verzweigungspunktes* möglich.

Ein derartiges Tragwerk ist dadurch gefährdet, daß ein erreichtes Lastniveau durch kleinste Störungen – Imperfektionen, Querlasten – auf tieferliegende Lastniveaus anderer Verzweigungspfade zurückspringen kann. Diese Fähigkeit zu sprunghaften Wechseln würde natürlich bei gleicher, aufgebracht Last zum Kollaps führen. Instabilitätsphänomene an druckbeanspruchten Konstruktionen sind wegen möglicher *sprungartiger* Deformationswechsel, also fehlender Vorwarnmechanismen, in hohem Maße sicherheitsgefährdend.

Wie können nichtlineare Last-Verformungspfade und zugehörige Instabilitätsphänomene, zunächst in einer quasistatischen Betrachtungsweise, numerisch behandelt werden? Ausgangspunkt ist das nichtlineare Gesamtpotential, das eine zu (2) sehr ähnliche Form besitzt [5]. Hierin sind jedoch mindestens die Verzerrungen ϵ *nichtlinear* mit den Verschiebungen \mathbf{u} verknüpft (siehe auch die kinematischen Beziehungen der Bilder 2 und 3):

$$\epsilon = (\mathbf{D}_{kL} + \mathbf{D}_{kN}(\mathbf{u})) \mathbf{u}. \quad (9)$$

\mathbf{D}_{kL} bezeichnet hierin den bekannten linearen Differentialoperator, \mathbf{D}_{kN} einen von den Verschiebungskomponenten \mathbf{u} und deren kovarianten Ableitungen abhängigen *nichtlinearen* Operatoranteil. Nun inkrementiert man das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}, \quad (10)$$

zerlegt es also

- in ein als bekannt angesehenes Feld $\bar{\mathbf{u}}$, das einem Gleichgewichtszustand angehören möge, und
- ein unbekanntes, inkrementelles Verschiebungsfeld $\dot{\mathbf{u}}$.

Alle weiteren Diskretisierungsschritte erfolgen völlig analog denjenigen des linearen Falles, gleiches gilt für die Stationaritätsbedingung des Gesamtpotentials. Statt (8) ist das Ergebnis die *tangentiale Steifigkeitsbeziehung*, ein lineares Gleichungssystem nunmehr für die globalen Freiheitsgrade \mathbf{V} der diskretisierten Verschiebungsinkremente:

$$(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{gL} + \mathbf{K}_{gN} + \mathbf{K}_{uL} + \mathbf{K}_{uN}) \mathbf{V} = \mathbf{K}_t \mathbf{V} = \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_i. \quad (11)$$

Hierin entspricht \mathbf{K}_e der bekannten (linearen) globalen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ; \mathbf{K}_g ist die *geometrische Steifigkeitsmatrix* und \mathbf{K}_u die Anfangs-Verschiebungsmatrix. Die mit $L(N)$ indizierten Teilmatrizen hängen linear (quadratisch) vom Verschiebungsfeld \mathbf{V} ab. \mathbf{P}_e bezeichnet die globalen Knotenkräfte eines erreichten Lastniveaus, \mathbf{P}_i die zugehörigen inneren Gleichgewichtskräfte, die bis zu kubische Abhängigkeiten von \mathbf{V} aufweisen.

Mit Hilfe der tangentialen Steifigkeitsbeziehung (11) können beliebige nichtlineare Last-Verformungspfade numerisch simuliert werden. Da ein linearer Algorithmus wie (11) von einem gekrümmten Pfad notwendigerweise divergiert, existieren *Iterations-techniken* [6], um nach einer Lastinkrementierung erneut den exakten Pfad, natürlich im Rahmen gesetzter Genauigkeiten, zu erreichen. Daher spricht man insgesamt von *inkrementell-iterativen* Lösungsalgorithmen nichtlinearer Elementverfahren.

Bemerkenswert ist nun, daß alle *Instabilitätsmöglichkeiten* längs eines solchen nichtlinearen Pfades als Eigenschaften in der symmetrischen, tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_t gespeichert sind. Durch Dreieckszerlegung

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \quad (12)$$

können aus der Diagonalmatrix \mathbf{D} folgende Verhaltensweisen eines Punktes des Last-Verformungspfades prognostiziert werden:

- alle $D_{ii} > 0$: \mathbf{K}_i positiv definit:
Stabiles Gleichgewicht.
- mind. ein $D_{ii} = 0$: \mathbf{K}_i singulär:
Kritisches Gleichgewicht, d. h. Durchschlags- oder Verzweigungspunkt.
- mind. ein $D_{ii} < 0$: \mathbf{K}_i indefinit:
Labiles Gleichgewicht.

Allein durch kontinuierliche Observation von \mathbf{K}_i während des Berechnungsprozesses lassen sich somit inherente Instabilitäten der Struktur entdecken und zugehörige Sekundärpfade verfolgen.

Das skizzierte Konzept soll erneut anhand zweier Problemstellungen aus der Praxis erläutert werden. Bild 10 zeigt einen Tank für flüssiges Erdgas, bestehend aus dem Spannbetonsicherheitsbehälter, einer Kälteisolation sowie dem Innentank. Dieses als ringversteifte Edelstahlschale konstruierte Tragwerk ist im ungefüllten Zustand durch sein Eigengewicht und die Isolation druckbeansprucht und damit beulgefährdet. Bild 11 gibt eine mögliche, durch Verzweigen des primären Pfades entstandene Beulform wieder, in welcher im wesentlichen das untere Tankfeld in 34 Umfangswellen ausbeult. Das Verhalten dieses nunmehr mit Vorbeulen behafteten Tankfeldes bei Erhöhung der Axiallasten zeigt Bild 12: Zunächst durchläuft es einen Durchschlagspunkt mit Lastabfall; im tiefen Nachbeulbereich springt der Last-Verformungspfad dann zusätzlich zweimal auf tieferliegende Sekundärpfade.

Das zweite Beispiel behandelt das *Innendach* der alten Kongreßhalle Berlin, das nach dem Einsturz und Abbruch der beiden Randbereiche vom ursprünglichen Dach

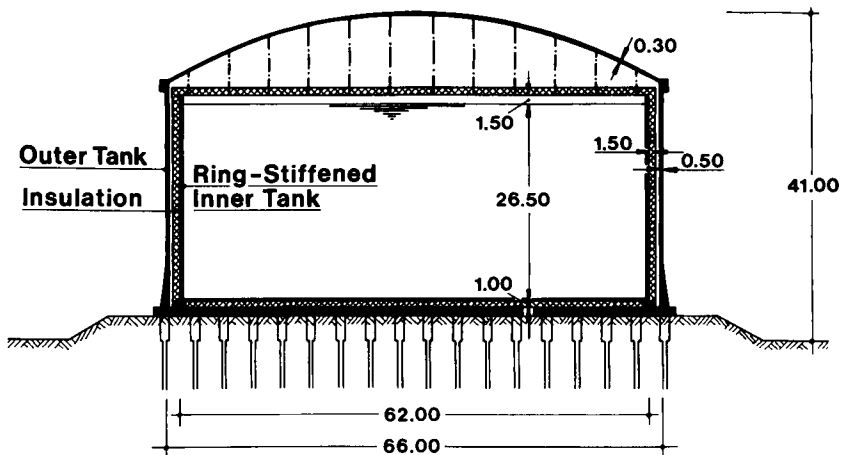
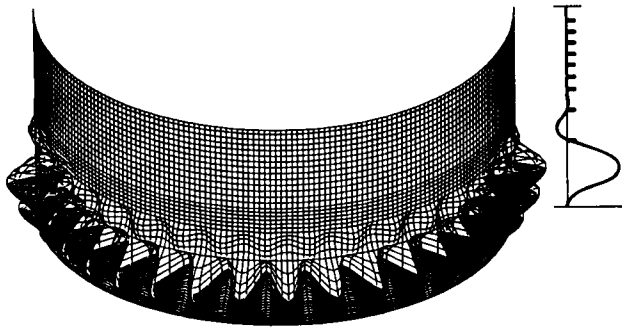


Bild 10:
Schnitt durch einen LNG-Liquid Natural Gas-Tank



$$N = 34, \lambda_c = 4.4$$

Bild 11:
Beulform des Innentanks

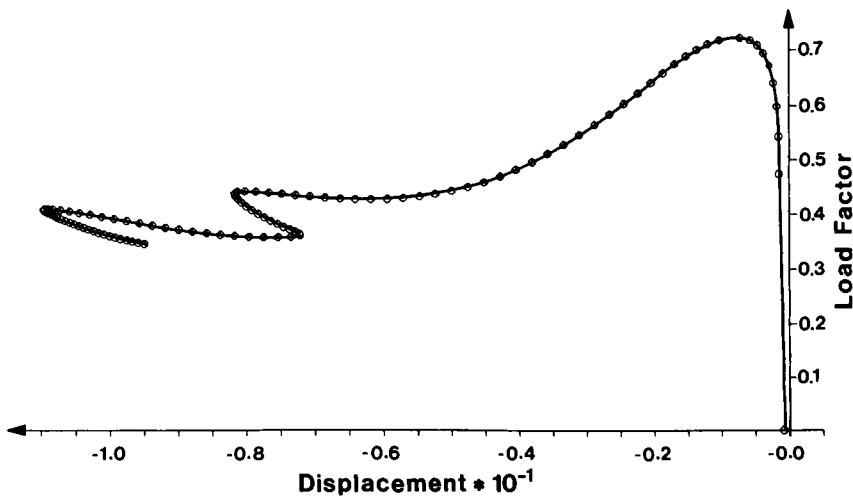


Bild 12:
Last-Verformungspfad eines Tankfeldes unter Axiallast

verbliebene Resttragwerk. (Das neue Spannleichtbetondach überspannt zwischen den neuen Randbögen dieses alte Dach [7]). Hier stellte sich die Frage, ob das Innendach den Frischbeton einer erforderlichen Verstärkung rüstungsfrei abtragen könne, ohne in Form der auf Bild 14 wiedergegebenen Beulfigur auszuweichen, wie dies eine Näherungsberechnung vorhersagte. Die mit besonderer Sorgfalt und unter Beachtung vorhandener Imperfektionen durchgeführten Analysen bewiesen, daß Laststeigerungen um mehr als das sechsfache Eigengewicht ohne Stabilitätsgefährdung möglich waren.

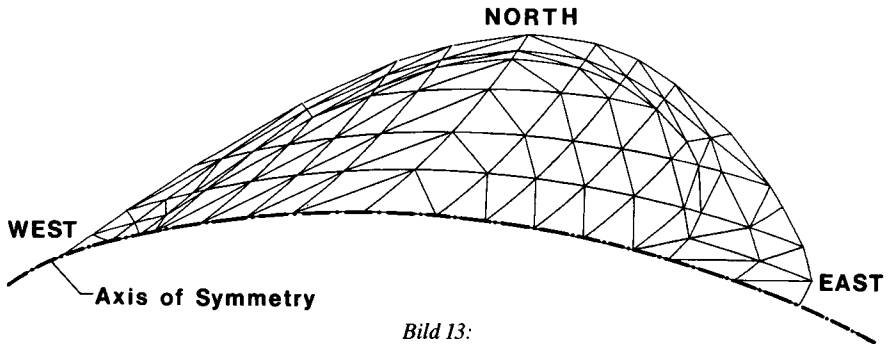


Bild 13:
Diskretisierung des Innendaches der Kongreßhalle Berlin

Loadfactor: 3.55

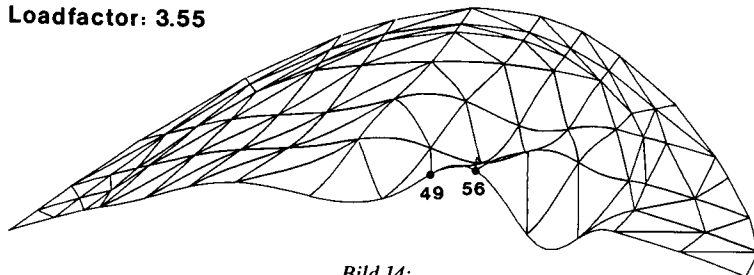


Bild 14:
1. Beulform nach der klassischen Näherung

Zwar mußten gemäß Bild 15 große Deformationen erwartet werden, aber keine Instabilitäten.

Bei der Untersuchung von Stabilitätsphänomenen an Flächentragwerken ist die im Titel aufgeworfene Frage nach der Bedeutung der Elementmethoden für die Tragwerkssicherheit besonders einfach zu beantworten: ohne sie wären wirklichkeitsnahe, nichtlineare Analysen bei komplexen Tragwerksgeometrien unmöglich, und die Bauingenieure müßten ihre Sicherheitsaussagen auf Näherungsberechnungen gründen.

4. Zeitvariante Prozesse

Der Parameter *Zeit* ist bei vielen Festigkeitsproblemen allgegenwärtig und bedeutsam, auch wenn Zeiteinflüsse häufig im Sinne quasistatischer Analyseverfahren unterdrückt werden. Sind jedoch *zeitvariante* Lasten, Materialeigenschaften oder Topologien dominant, so wird eine echte *dynamische Analyse* unumgänglich: zu den Steifigkeitswirkungen treten Massen- und Dämpfungseinflüsse. Statt der globalen Steifigkeitsbeziehung (8) ist nun die diskretisierte Form der Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P}(t) \quad (13)$$

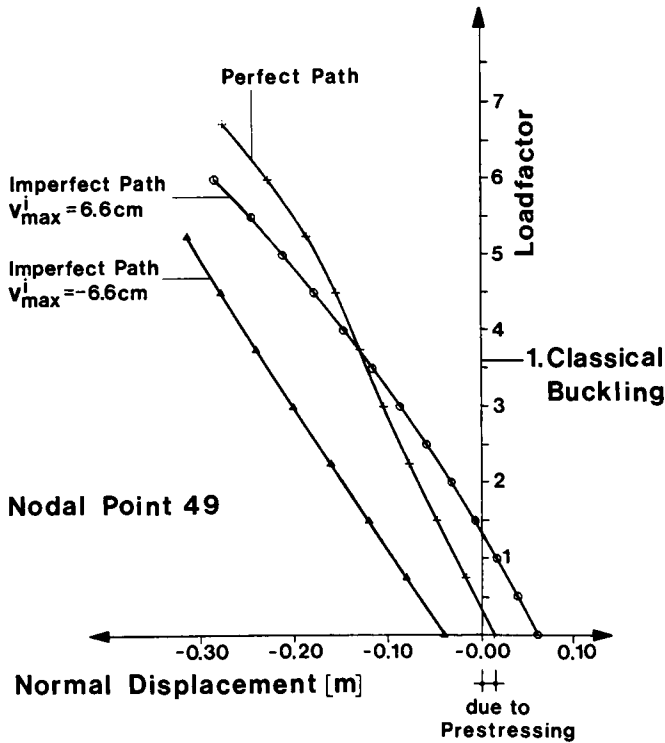


Bild 15:

Last-Verformungspfad des Innendaches unter Eigenlast und Vorspannung

zu behandeln, die zweckmäßigerweise auch in der Zeitkoordinate t diskretisiert wird. In (13) kürzt \mathbf{M} die Massen- und \mathbf{C} die Dämpfungsmatrix ab. Eine zu (11) korrespondierende, *tangentiale Bewegungsgleichung* ist ebenfalls ohne Schwierigkeiten angebar [8]. In jedem zeitlichen Teilintervall ist damit ein numerisches Anfangsrandwertproblem zu lösen, wobei Knotengeschwindigkeiten und Knotenbeschleunigungen als Anfangsgrößen an das folgende Zeitintervall weitergegeben werden.

Ohne auf die vielfältigen Möglichkeiten der Zeitintegration im einzelnen einzugehen [9], [10], soll abschließend das auf Bild 16 dargestellte *dynamische Stabilitätsproblem* behandelt werden. Dabei handelt es sich um ein axial belastetes, zylindrisches Schalenfeld. Dessen Randbelastung bestehe aus einer zeitinvarianten Grundlast p_s und der mit der Kreisfrequenz Ω pulsierenden Komponente p_D : das Problem einer sog. *Parametererregung*. Derartige Systeme besitzen die Eigenschaft, daß sie für bestimmte Verhältnisse der Erreger- zur Eigenfrequenz sowie zugeordnete Lastverhältnisse stabil schwingen, für andere dagegen *dynamisch instabil* werden.

$R = 83.33 \text{ m}$
 $a = 10.00 \text{ m}$
 $t = 0.1 \text{ m}$
 $E = 3.4 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
 $\nu = 0.2$

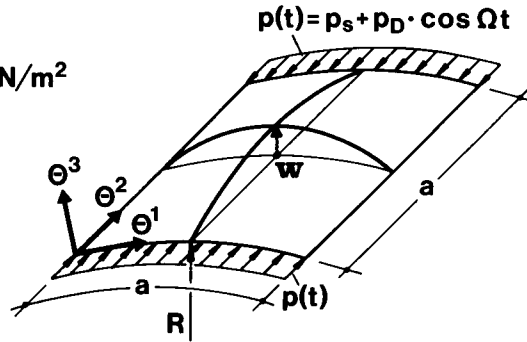


Bild 16:
Axial belastetes zylindrisches Schalenfeld

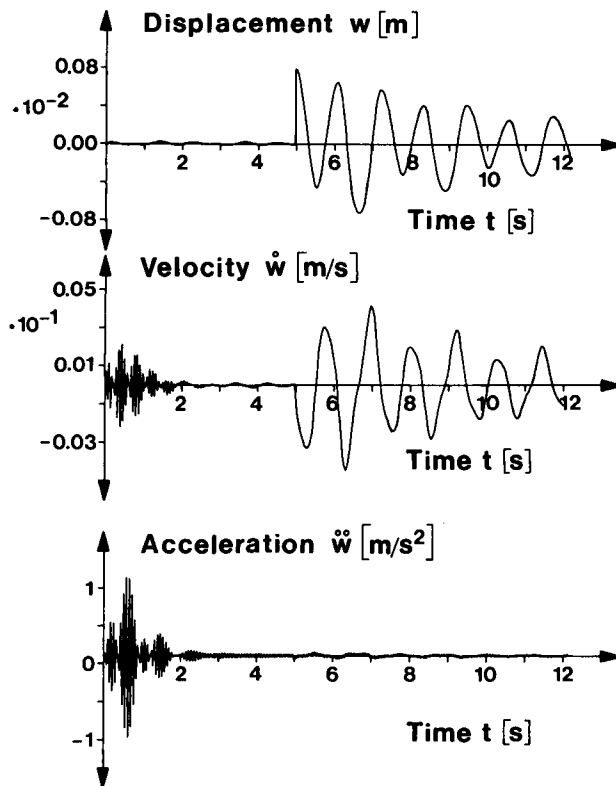


Bild 17:
Mittendurchbiegung: Zeitverlauf einer Störung bei stabilem Schwingungsverhalten

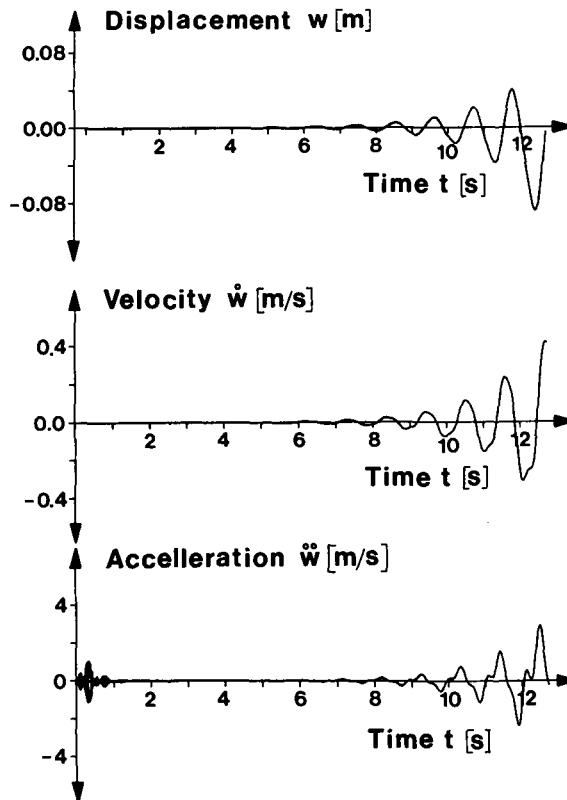


Bild 18:

Mittendurchbiegung: Zeitverlauf einer Störung bei instabilem Schwingungsverhalten

Stabilität oder Instabilität eines Schwingungszustandes wurde durch Aufbringen und zeitliche Verfolgung einer Störung im Sinne der ersten Modalform untersucht. Auf den Bildern 17 und 18 ist der Zeitverlauf der zentralen Normalverschiebung dargestellt, zunächst für einen stabilen, sodann für einen instabilen Schwingungszustand. Man erkennt deutlich das Herausdämpfen der Störung nach wenigen Perioden des ersten Falles, im zweiten Fall dagegen deren Anfachung.

5. Schlußbemerkung

Der Beitrag sollte dem Leser einen Einblick in den Stand computerorientierter Festigkeitsanalysen für Flächentragwerke vermitteln. Gerade bei diesen Tragwerken haben die Elementmethoden Möglichkeiten zu revolutionären Qualitätsverbesserungen der Berechnungsergebnisse geschaffen. Dank dieser Methoden können heute beliebig komplexe Strukturen unter vielfältigen Einwirkungen und Werkstoffverhal-

tensweisen wirklichkeitsnah simuliert werden, wodurch zweifelsohne signifikante Steigerungen der Tragwerkssicherheit, d.h. spürbar sicherere und zuverlässigere Konstruktionen, erreichbar geworden sind.

Literatur

- [1] Tonti, E.: On the Formal Structure of Physical Theories. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano, 1975.
- [2] Basar, Y., Krätzig, W.B.: Mechanik der Flächentragwerke. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1985.
- [3] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journal für Mathematik (Crelle) 135 (1909), 1.
- [4] Harte, R., Krätzig, W.B.: Tensor-orientierte Formulierung nichtlinearer, finiter Schalenelemente. Ingenieur-Archiv 56 (1986), 114.
- [5] Krätzig, W.B., Wittek, U., Basar, Y.: Buckling of general shells – theory and numerical analysis. Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. (ed.): Collapse, Cambridge University Press, Cambridge 1983, 377.
- [6] Riks, E.: An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. Int. J. Solids Structures 15 (1979), 529.
- [7] Kuehl, G., Bomhard, H.: Wiederaufbau der Kongreßhalle Berlin – Die Bauaufgabe und ihre Lösung. Beton- und Stahlbetonbau 81 (1986), 22.
- [8] Basar, Y., Eller, C., Krätzig, W.B.: Finite element procedures for parametric resonance phenomena of arbitrary elastic shell structures. Computational Mechanics 2 (1987), 89.
- [9] Bathe, K.-J., Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1976.
- [10] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method. 3rd revised and expanded edition. McGraw-Hill Book Company, London 1983.